140. 松島氏の談話1113より

（身延高校） 豊 田 五 浪

松島氏は本誌1113号で，kを$\mathfrak{p}$-進数体とし，そのAbel 拡大K/k に於て，もし$N_{K/k}(A)=1$ なるKの元Aが常に$B^{1-\lambda}$なる形の元のみの積として表はされるならば，K/k は zyklisch になることを証明されました。茲ではそれ

に整数論的な附加を一寸させて戴きたいと思ひます. K/k を galoissch としてもその Galois 群 $\mathfrak{G}$ は可解でありますから. 単位元ならざる Abel 群を不変部分群として含みます. それを $\mathfrak{N}$ とすると, $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ は別に Abelsch でも Zyklisch でもないのですが.

I. K/k を Galois 拡大とし. その Galois 群を $\mathfrak{G}$ とするとき, もし $N_{K/k}(A)=1$ なる K の元 A が $B^{1-\lambda}$ なる形の元の積で表はされるならば…… $\mathfrak{G}$ の不変部分群 $\mathfrak{N}$ について. $\mathfrak{N}$ が Abelsch で $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ が Zyklisch なる時, K/k は Zyklisch となる.

ことを証明致します. 松島氏に依れば K/k が Abelsch となることを云へばよい事が分ります. 主に参考にしましたのは. 淡中先生本誌談話 1046 と. 中山先生の局所類体論. 及び本誌談話 1092 とです.

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{N}+S\mathfrak{N}+\cdots\cdots+S^{f-1}\mathfrak{N}$$

として $N_{Z/k}(N_{K/Z}(A))=1$ [Z は $\mathfrak{N}$ に對應するガロア中間体] の時は $N_{K/Z}(A)=z^{1-S}$ $(z\in Z)$ とおけます. 中山先生 1092 により.

$$z=a_{\mu,\nu}\, N_{K/Z}(C) \qquad (C\in K)$$

$$z^{1-S}=N_{K/Z}\left(\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}\cdot D^{1-S}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$N_{K/k}\left(\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}\right)=1$$

ですから $\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}=\prod B^{1-\lambda}$ 之は更に $\prod B_0^{1-\mu}\ \prod B_1^{1-S^i\nu}$ $(\mu,\nu\in\mathfrak{N})$ 或ひは $\prod B_0^{1-\mu}\ \prod B_2^{1-\nu}\ \prod B_3^{1-S}$ の如くなり $N_{K/Z}\left(\frac{b_{S,\mu}}{b_{\mu,S}}\right)=N_{K/Z}\left(\prod B_3^{1-S}\right)$ $=N_{K/Z}(B_4^{1-S})$. 故に (1) と組合せて $z^{1-S}=N_{K/Z}A_0^{1-S}$

II. $N_{Z/k}\, z_0=1$ ならば. $z_0\in N^*_{K/Z}$ II'. $N^*_{K/k}\subseteq N^*_{K/Z}$ (IIヲ待つ証明略)

又. 同様に $z^{1-S}=N_{K/Z}A_0^{1-S}$ なる結果より $\frac{z}{N_{K/Z}(A_0)}=\left(\frac{z}{N_{K/Z}(A_0)}\right)^S$. 而して, $\frac{z}{N_{K/Z}(A_0)}\in Z$ だから $\frac{z}{N_{K/Z}(A_0)}=a\in k$. 故に $z=aN_{K/Z}(A_0)$

Ⅲ. $Z^*=k^*N^*_{K/Z}$

今kのKに含まれる最大Abel拡大をΛとすると. それに対応する$\mathfrak{G}$の部分群$\mathfrak{A}$は$\mathfrak{N}$に含まれる事は明らかですから.

$$k\subset Z\subseteq\Lambda\subseteq K$$

茲で $\Lambda\neq K$ と仮定すると. 局所類体論の終結定理 一意性定理により.

$$N^*_{K/k}=N^*_{\Lambda/k}\,,\quad N^*_{K/Z}\subsetneqq N^*_{\Lambda/Z}$$

従って $(Z^*:N^*_{\Lambda/Z})<(Z^*:N^*_{K/Z})$ Ⅲを使って,

$$(Z^*:N^*_{\Lambda/Z})=(k^*N^*_{\Lambda/Z}:N^*_{\Lambda/Z})=(k^*:N^*_{\Lambda/Z}\cap k^*)$$

$$(Z^*:N^*_{K/Z})=(k^*N^*_{K/Z}:N^*_{K/Z})=(k^*:N^*_{K/Z}\cap k^*)\quad (Z^*=k^*N^*_{\Lambda/Z}\text{ デモヨイ})$$

従って. $N^*_{\Lambda/Z}\cap k^*\supsetneqq N^*_{K/Z}\cap k^*$ が結論出来ます. さて,

$a\in N^*_{\Lambda/Z}\cap k^*$ で $a\notin N^*_{K/Z}\cap k^*$ なるaをとれば. $a=N^*_{\Lambda/Z}(\lambda^0)$ ($\lambda^0\in\Lambda$) で $a\neq N_{K/Z}(A)$. 然るに $a^f\in N^*_{\Lambda/k}=N^*_{K/k}$. 故に

$a^f=N_{K/k}(\kappa_0)$, $N_{Z/k}(a)=N_{Z/k}(N_{K/Z}(\kappa_0))$. $N_{Z/k}\left(\frac{N_{K/Z}(\kappa_0)}{a}\right)=1$. 従って $a\in N^*_{K/Z}$. 之れは仮定に矛盾する. 従って $K=\Lambda$. でなければなりません.

註 拡張された Chevalley の因子団の定理 (秋月先生) を使って. 定理 (秋月先生) を使って 定理の仮定の下に $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ が zyklisch になる事を云ひたいのですが旨く行きません. 御教示願ひます.